

# Limity funkcí

## 8. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

### Teorie:

#### **VĚTA** (Limita složené funkce)

Buť  $c, D, A \in \mathbb{R}^*$ , a necht' jsou  $f$  a  $g$  funkce. Necht' platí, že  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = D$ ,  $\lim_{x \rightarrow D} f(x) = A$ .

Necht' platí alespoň jedna z podmínek:

$$\exists \eta > 0 \forall x \in P(c, \eta): g(x) \neq D \quad (P)$$

$$f \text{ je spojitá v } D. \quad (S)$$

Pak platí  $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = A$ .

#### **POZNÁMKA** (Znamé limity)

Platí, že:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$ , a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ .

### Příklady:

1. Spočtete následující limity, nebo dokažte, že neexistují (V bodech d) a e) použijte ze známých limit pouze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ ):

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} ([x] - x)$

f)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2 \cos x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot [\frac{1}{x}]$

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$

h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos \alpha x)}{\log(\cos \beta x)}$

\* 2. Spočtete následující limity, nebo dokažte, že neexistují:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos x}{x^2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{\tan^2 x}}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$